Nếu ta thêm điều kiện $w(0)=i$ thì $i=e^{i\varphi}\dfrac{0-i}{0+i} \Rightarrow e^{i\varphi}=-i$.

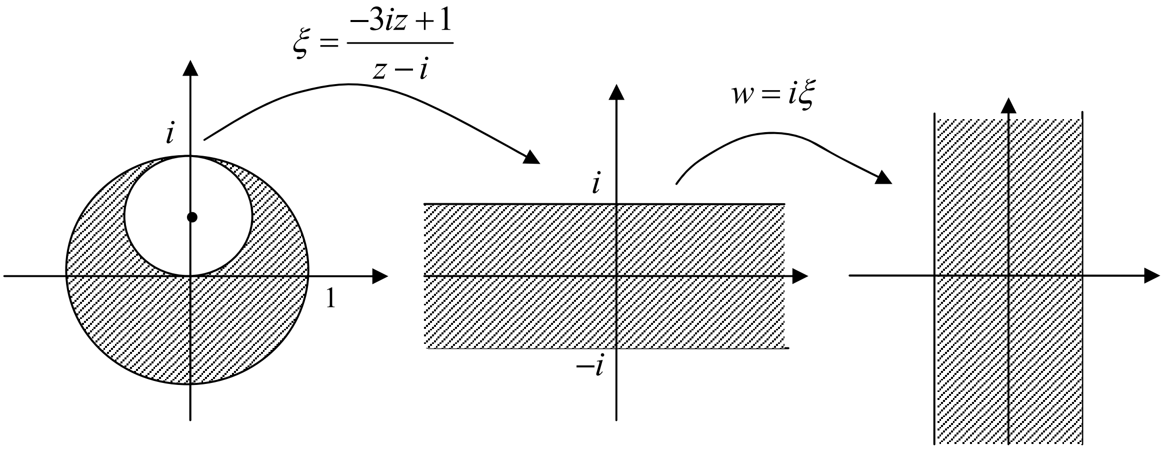
Vậy phép biến hình cần tìm là $w=-i\dfrac{z^3-i}{z^3+i}$.

Ví dụ 1.14: *Tìm phép biến hình bảo giác* $w=f(z)$ *biến miền* D : $\begin{cases}|z|<1\\ \left|z-\dfrac{i}{2}\right|>\dfrac{1}{2}\end{cases}$ *thành băng* $-1<\operatorname{Re}w<1$.

Giải: Phép biến hình phân tuyến tính $\xi=\dfrac{az+b}{z-i}$ biến $i,\,0,-i$ lần lượt thành $\infty,\,i,-i$, do đó ξ biến miền D thành băng $-1<\operatorname{Im}\xi<1$.

Phép quay $w=i\xi$ biến băng $-1<\operatorname{Im}\xi<1$ thành băng $-1<\operatorname{Re}w<1$.

Vậy phép biến hình cần tìm là $w=i\dfrac{-3iz+1}{z-i}=\dfrac{3z+i}{z-i}$.



1.4. TÍCH PHÂN PHỨC, CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY

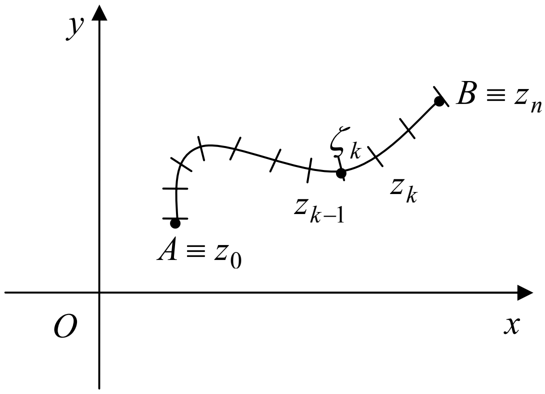
Trong mục này ta nghiên cứu các tính chất và các biểu diễn của hàm phức giải tích, vì vậy ta chỉ xét các hàm đơn trị.

1.4.1. Định nghĩa và các tính chất của tích phân phức

Khái niệm tích phân phức dọc theo một đường cong được định nghĩa tương tự tích phân đường loại 2.

Giả sử $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ xác định đơn trị trong miền D. L là đường cong (có thể đóng kín) nằm trong D có điểm mút đầu là A mút cuối là B.

Chia L thành n đoạn bởi các điểm $A\equiv z_0,\,z_1,\,z_2,\,...,z_n\equiv B$ nằm trên L theo thứ tự tăng dần của các chỉ số.



Chọn trên mỗi cung con $\overparen{z_{k-1}, z_k}$ của đường cong L một điểm bất kỳ $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$.

Đặt $z_k = x_k + iy_k$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$; $k = 1, 2, ..., n$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad \textbf{(1.48)}$$

được gọi là tổng tích phân của hàm $f(z)$ trên L ứng với phân hoạch và cách chọn các điểm đại diện trên. Tổng này nói chung phụ thuộc vào hàm $f(z)$, đường L, cách chia L bởi các điểm z_k và cách chọn các điểm ζ_k.

Nếu khi $\max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta z_k| \to 0$ tổng S_n tiến tới giới hạn $I \in \mathbb{C}$ không phụ thuộc cách chia đường L và chọn các điểm ζ_k thì I được gọi là tích phân của hàm $f(z)$ dọc theo đường cong L từ A đến B, ký hiệu $\int\limits_{\overparen{AB}} f(z)dz$. Vậy

$$I = \int\limits_{\overparen{AB}} f(z)dz = \lim_{\max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad \textbf{(1.49)}$$

Tổng tích phân (1.48) có thể phân tích thành tổng của 2 tổng tích phân đường loại 2.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} \left[u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)\right](\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\right] + i\sum_{k=1}^{n} \left[v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k\right] \qquad \textbf{(1.50)}$$

Tương tự (1.27), áp dụng (1.17) ta có

$$\max_{1 \le k \le n} |\Delta z_k| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta x_k| \to 0 \\ \max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta y_k| \to 0 \end{cases}$$

Vì vậy tích phân phức (1.49) tồn tại khi và chỉ khi hai tích phân đường loại 2 có tổng tích phân (1.50) tồn tại và có đẳng thức

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} udx - vdy + i\int_{\overset{\frown}{AB}} vdx + udy \qquad \textbf{(1.51)}$$

Nếu hàm $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ liên tục trên D và cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc thì tồn tại hai tích phân đường loại 2 ở vế phải của (1.51) do đó tồn tại tích phân phức tương ứng.

Đẳng thức (1.51) suy ra rằng tích phân phức có các tính chất như các tính chất của tích phân đường loại 2.

- $\int_{\overset{\frown}{AB}} \left(f(z)+g(z)\right)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz + \int_{\overset{\frown}{AB}} g(z)dz$.
- $\int_{\overset{\frown}{AB}} kf(z)dz = k\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$; $k - const$.
- $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz$.
- $\left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L |f(z)|ds$,

vế phải của bất đẳng thức là tích phân đường loại 1 trên cung L có vi phân cung là $ds = |dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Đặc biệt, nếu $|f(z)| \le M$, $\forall z \in$ L và $\boldsymbol{l}$ là độ dài của đường cong L thì

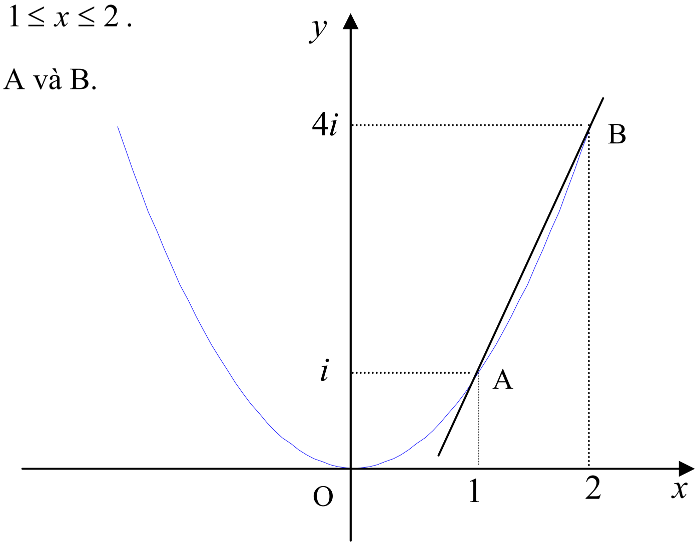
$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le Ml. \qquad \textbf{(1.52)}$$

Khi A trùng với B thì L là đường cong kín (ta chỉ xét các đường cong kín không tự cắt, gọi là đường Jordan). Tích phân trên đường cong kín L được quy ước lấy theo chiều dương, ký hiệu là $\oint_L f(z)dz$.

Ví dụ 1.15: Tính tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} z^2 dz$; $A = 1+i$, $B = 2+4i$

1. Dọc theo parabol $y = x^2$, $1 \le x \le 2$.
2. Dọc theo đường thẳng nối A và B.

Giải:



$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} z^2 dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x+iy)^2 (dx+idy) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \left(x^2-y^2\right)dx - 2xydy + i\int_{\overset{\frown}{AB}} 2xydx + \left(x^2-y^2\right)dy$$

1. Nếu lấy tích phân dọc theo $y = x^2$ thì $dy = 2xdx$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 \left[\left(x^2 - x^4\right) - 4x^4\right]dx + i\int_1^2 \left[2x^3 + \left(x^2 - x^4\right)2x\right]dx = \frac{-86}{3} - 6i .$$

2. Nếu lấy tích phân dọc theo đường thẳng nối từ A đến B thì $y = 3x - 2$, $dy = 3dx$

$$I = \int_1^2 \left[x^2 - (3x-2)^2 - 2x(3x-2)3\right]dx + i\int_1^2 \left[2x(3x-2) + 3\left(x^2 - (3x-2)^2\right)\right]dx = \frac{-86}{3} - 6i.$$

Qua ví dụ trên ta nhận thấy giá trị của tích phân không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ A đến B. Các định lý sau cho điều kiện cần và đủ để tích phân phức không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nối hai đầu mút của đường.

1.4.2. Định lý tích phân Cauchy

Định lý 1.6: Điều kiện cần và đủ để tích phân của hàm $f(z)$ trong miền D không phụ thuộc vào đường lấy tích phân là tích phân của $f(z)$ dọc theo mọi đường cong kín bất kỳ (không tự cắt nhau) trong D phải bằng 0.

Định lý 1.7: Nếu hàm phức $w = f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D thì tích phân của $f(z)$ dọc theo mọi đường cong kín L bất kỳ trong D đều bằng 0.

Chứng minh: Áp dụng định lý Green để đưa tích phân đường loại 2 về tích phân kép và công thức (1.51) ta có

$$\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + i\oint_L vdx + udy = \iint_\Delta \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó Δ là hình phẳng giới hạn bởi đường cong kín L nằm trong D.

Vì $w = f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D nên các hàm dưới dấu tích phân trong hai tích phân kép ở trên đều bằng 0 do thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Vậy $\oint_L f(z)dz = 0$.

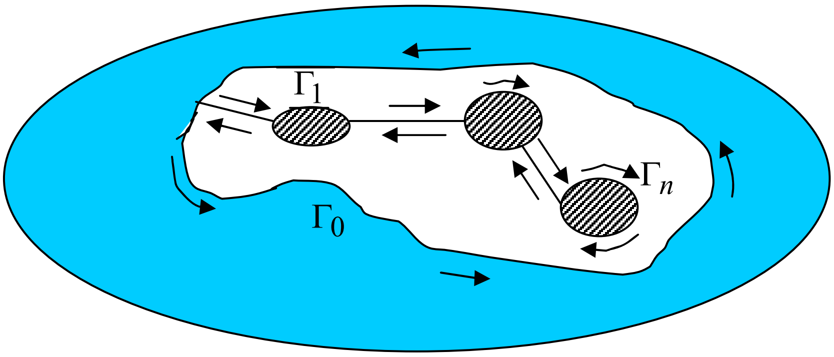
Hệ quả 1: Nếu $w = f(z)$ giải tích trong miền kín, đơn liên $\overline{D}$ thì. $\oint_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Chứng minh: Tồn tại miền đơn liên $G \supset \overline{D}$ và $f(z)$ giải tích trong G. Áp dụng định lý 1.9 cho hàm $f(z)$ trong G và tích phân lấy trên đường cong kín $\partial D \subset G$.

Hệ quả 2: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền kín đa liên $\overline{D}$ có biên ngoài là Γ_0 và biên trong là $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ thì

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k} f(z)dz \qquad \textbf{(1.53)}$$

Chứng minh:



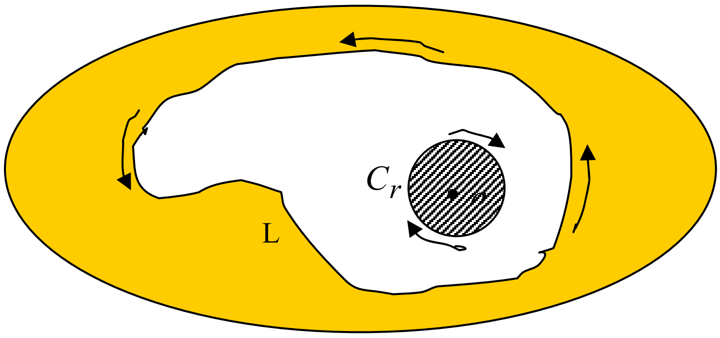
Cắt $\overline{D}$ theo các lát cắt nối Γ_0 với $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ thì ta được một miền đơn liên. Tích phân trên biên của miền này bằng 0 và chú ý rằng lúc đó tích phân trên đường nối Γ_0 với $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ được lấy hai lần ngược chiều nhau vì vậy tích phân trên biên bằng $\oint\limits_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{\Gamma_k} f(z)dz = 0$.

Có thể chứng minh được rằng hệ quả 1 và hệ quả 2 còn đúng khi $f(z)$ giải tích trong D và liên tục trong $\overline{D}$.

Ví dụ 1.16: Tính tích phân $I_n = \oint\limits_L \dfrac{dz}{(z-a)^n}$; $n \in \mathbb{Z}$ trong đó L là đường cong kín bất kỳ không đi qua a.

Giải:

Gọi D là miền được giới hạn bởi L.



- Nếu $a \notin$ D thì $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$ giải tích trong D nên $I_n = 0$.

- Nếu $a \in$ D. Gọi $C_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| = r\}$ là đường tròn tâm a bán kính r. Chọn r đủ bé để $C_r \subset$ D. Xét D' là miền nhị liên có được bằng cách lấy miền D bỏ đi hình tròn tâm a bán kính r. D' có biên ngoài là L, biên trong là C_r. $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}$ giải tích trong D'. Theo hệ quả 2 ta có:

$$I_n = \oint\limits_L \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint\limits_{C_r} \frac{dz}{(z-a)^n}.$$

Phương trình tham số của $C_r : z = a + re^{it}$; $0 \le t \le 2\pi$. Do đó

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{r^n e^{\text{int}}} dt = \begin{cases} \int_0^{2\pi} idt & \text{khi} \quad n=1 \\ \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt & \text{khi} \quad n \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i & \text{khi} \quad n=1 \\ 0 & \text{khi} \quad n \neq 1. \end{cases} \qquad \textbf{(1.54)}$$

1.4.3. Tích phân bất định, nguyên hàm

Hàm $F(z)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm phức $f(z)$ nếu $F'(z) = f(z)$.

Tương tự như hàm thực, ta có thể chứng minh được rằng nếu $F(z)$ là một nguyên hàm của $f(z)$ thì $F(z)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(z)$ và mọi nguyên hàm của $f(z)$ đều có dạng như thế.

Tập hợp các nguyên hàm của $f(z)$ được gọi là tích phân bất định của $f(z)$, ký hiệu $\int f(z)dz$.

Định lý 1.8: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D, $z_0 \in$ D. Khi đó

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{z_0 z}} f(z)dz$$

là một nguyên hàm của $f(z)$. Trong đó vế phải của đẳng thức trên là tích phân phức được lấy theo đường cong bất kỳ nằm trong D nối z_0 đến z.

Định lý 1.9: (Công thức Newton - Lepnitz)

Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D thì tồn tại một nguyên hàm $F(z)$. Khi đó, với mọi z_0, $z_1 \in$ D ta có:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0) \qquad \textbf{(1.55)}$$

Ví dụ 1.17: $\int e^z dz = e^z + C$, $\int z^n dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + C$, $\int \sin z dz = -\cos z + C$;

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Bigg|_{1+i}^{2+4i} = -\frac{86}{3} - 6i.$$

1.4.4. Công thức tích phân Cauchy

Định lý 1.10: Giả sử $f(z)$ giải tích trong miền $\overline{D}$ (có thể đa liên) có biên là ∂D. Khi đó, với mọi $a \in D$ ta có:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz \qquad \textbf{(1.56)}$$

tích phân được lấy theo chiều dương của ∂D.

Chứng minh: Với mọi $\varepsilon > 0$ chọn r đủ bé để đường tròn tâm a bán kính r: $C_r \subset$ D và $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ (điều này có được vì $f(z)$ liên tục tại a). Gọi $\overline{D'_r}$ là miền có được bằng cách bỏ đi hình tròn $C_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| < r\}$ từ miền D. Biên của $\overline{D'_r}$ gồm biên ∂D của D và C_r. Hàm $\dfrac{f(z)}{z-a}$ giải tích trong miền $\overline{D'_r}$, áp dụng hệ quả 2 của Định lý 1.**6** ta được

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

Mặt khác, từ ví dụ 1.16 ta có $\left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\dfrac{f(z)}{z-a}dz - f(a)\right| = \left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\dfrac{f(z)}{z-a}dz - \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\dfrac{f(a)}{z-a}dz\right|$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2r\pi = \varepsilon .$$

Vì $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý cho trước nên $\left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\dfrac{f(z)}{z-a}dz - f(a)\right| = 0 \Rightarrow f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\dfrac{f(z)}{z-a}dz$.

1.4.5. Đạo hàm cấp cao của hàm giải tích

Định lý 1.11: Hàm $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$ thì có đạo hàm mọi cấp trong D và với mọi $a \in D$ ta có:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad \textbf{(1.57)}$$

Từ (1.56)-(1.57) ta có công thức tích phân Cauchy:

$$\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a),\ \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a) \qquad \textbf{(1.58)}$$

trong đó C là đường cong kín bất kỳ bao quanh a nằm trong D.

Nhận xét:

1. Định lý trên suy ra rằng đạo hàm của một hàm giải tích là một hàm giải tích.

2. Kết hợp định lý 1.**7** và định lý 1.10, ta suy ra rằng: điều kiện cần và đủ để hàm đơn trị $f(z)$ có nguyên hàm trong miền D là giải tích trong D.

Ví dụ 1.18: Tính tích phân $I = \oint_C \dfrac{\cos z}{(z+1)z^2}dz$, trong đó C là đường tròn: $|z-1| = 3$.

Giải: Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta có thể phân tích $\dfrac{1}{(z+1)z^2}$ thành tổng các phân thức hữu tỷ tối giản $\dfrac{1}{(z+1)z^2} = -\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z+1}$.

Do đó $I = \oint\limits_C \frac{\cos z}{(z+1)z^2} dz = -\oint\limits_C \frac{\cos z}{z} dz + \oint\limits_C \frac{\cos z}{z^2} dz + \oint\limits_C \frac{\cos z}{z+1} dz$.

Các điểm $z = 0$ và $z = -1$ đều nằm trong hình tròn giới hạn bởi C. Áp dụng công thức (1.56)' và (1.57)' ta có:

$$I = -2\pi i \cos z\big|_{z=0} + 2\pi i (\cos z)'\big|_{z=0} + 2\pi i \cos z\big|_{z=-1} = 2\pi i(-1 + \cos 1).$$